Vrai Faux

Exercice 1

Dans une entreprise, 400 employés ont réservé un repas au self de l'entreprise.Les statistiques montrent que si un employé a réservé, 6% ne mange pas à la cantine.
On appelle X le nombre de personnes mangeant réellement au self

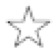
1. a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Déterminer l'espérance et l'écart type de X.
2. Le gestionnaire du self ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95% que tous les employés se présentant auront un repas.
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer k
   b) Même question avec un seuil de 99%.

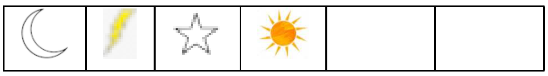
Exercice 2

La compagnie Oui SNCF doit remplir un train de 180 places.
Comme elle sait que le taux de défections habituel (indépendantes les unes des autres) des personnes ayant acheté un billet est de 8%, elle décide de mettre plus de 180 billets en vente.
On appelle n le nombre de billet mis en vente et X le nombre de passagers prenant réellement le train.

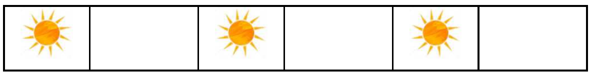
1. a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Déterminer l'espérance de X en fonction de n.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de billets à vendre pour être sûr au seuil de 95% de ne pas vendre plus de billets que ne peut contenir le train.

Exercice 3

On dispose de 4 motifs : une lune , un soleil  , une étoile  , un éclair pour dessiner un drapeau composé de 6 cases. Dans un drapeau deux cases voisines ne peuvent avoir le même motif, alors :

a) Il y a exactement 9 façons de finir ce drapeau : 

b) On veut ne mettre que 2 motifs, il y a 12 choix possibles de ces deux motifs

c) Il y a exactement 27 façons de finir ce drapeau 

d)Il y a exactement $4 * 3^5$ façons de dessiner un drapeau

e) Il y a $\binom{4}{2}$ façons de dessiner un drapeau avec uniquement 2 motifs

Exercice 4

Sept chevaux pénètrent au hasard et successivement sur la piste d'un cirque, trois chevaux sont blancs et les quatre autres sont noirs.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'entrée du premier cheval noir (donc par exemple si il rentre d'abord un blanc puis un noir X=2)

1. La probabilité que le premier cheval apparu soit blanc est $\dfrac{1}{3}$
2. La probabilité que les deux premiers chevaux soient blancs est $\dfrac{1}{7}$
3. Le nombre de possibilité d'apparition des chevaux si on veut intercaler un blanc et un noir est $\binom{7}{4}\binom{7}{3}$
4. $p(X=2)=\dfrac{2}{7}$
5. $p(X=4)=\dfrac{1}{6}$
6. $E(X)=\dfrac{8}{5}$

Exercice 5

On dispose de 2 dés cubiques d'apparences identiques, l'un est truqué, l'autre est parfait, pour le dé truqué la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{3}$

1. On lance le dé parfait trois fois de suite, la probabilité d'obtenir exactement deux 6 est $\frac{5}{6}$
2. On lance le dé truqué trois fois de suite, la probabilité d'obtenir exactement deux 6 est $\frac{2}{9}$
   On choisit maintenant un dé au hasard et on le lance trois fois de suite.
3. La probabilité d'obtenir exactement deux 6 est $\frac{7}{48}$
4. La probabilité d'avoir choisit le dé truqué sachant que l'on a obtenu deux 6 est $\frac{5}{7}$

Exercice 6

1. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément 3. La probabilité d'obtenir un jeton pair est :
   a) $\dfrac{5*5*4}{10*9*8}$ b) $\dfrac{5}{10}$ c) $\dfrac{\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$
2. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que : p(A)=0,4 ; p(B)=0,5 ; $p(A \cup B) = 0,65$.
   Alors $p(A \cap B) =$
   a) 0,1 b) 0,2 c) 0,25
3. A et B sont incompatibles alors :
   a) $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ c) A et B sont indépendants d) $p_A(B) = 0$

Exercice 7

Dans une mare vivent des grenouilles et de rainettes (qui ne sont pas vertes ici), 30% des grenouilles sont des rainettes et donc 70% sont des grenouilles vertes . Un hérons mange 10% des rainettes et 20% des grenouilles vertes.
Alors dans cette mare la probabilité :
a) qu'une rainette soit mangée parle héron est 0,1
b)qu'une grenouille verte soit mangée par le héron est $\frac{1}{5}$
c) qu'une grenouille soit mangée par le héron est 0,3
d) Qu'une grenouille soit une rainette et mangée par le héron est $\frac{3}{100}$
e) qu'une grenouille mangée par le héron soit une rainette est $\frac{1}{3}$

Exercice 8

Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

1. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$.
2. $\mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2^{2n}}$
3. $\mathrm{P}(X < 5) = 1 - P(X > 5)$
4. $\mathrm{E}(X) = 0,75n$

$\boxed{\textit{Correction}}$

Exercice 1

1. a) On reconnait un schéma de Bernoulli avec 400 épreuves identiques et indépendantes (ce qui aurait du être dit dans l'énoncé), donc le nombre de personnes mangeant réellement suit la loi binomiale $\mathcal{B}\,(400, 0.94)$. Attention à votre succès qui est ici manger donc a pour probabilité $1 - 0.06 = 0.94$.
   b) $E(X) = np = 400 * 0.94 = 376$
   V(X)=np(1-p)=400*0.94*0.06=22.56, et l'écart type est sa racine donc environ 4.75
2. a) On cherche le plus petit k pour que $p(X \leqslant k) \geqslant 0.95$ à la calculatrice, on trouve avec un tableau ou à tâtons : k = 384, donc il doit faire 384 repas pour que la probabilité d'en avoir assez soit supérieure à 0.95.
   b) c'est la même chose en remplaçant 0.95 par 0.99, on trouve 386.

Exercice 2

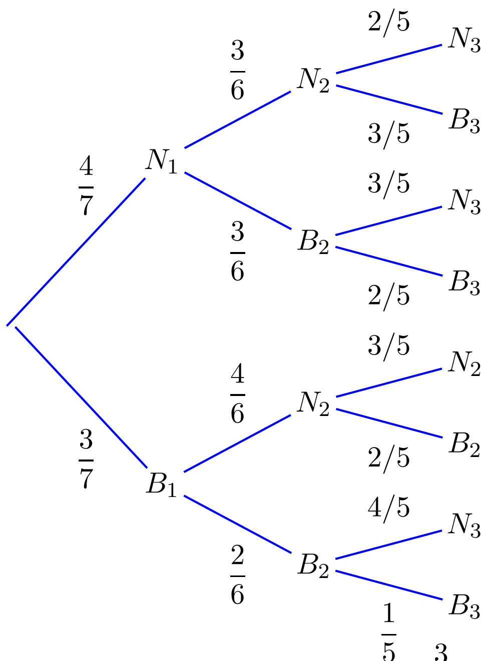
1. On reconnait un schéma de Bernoulli avec n épreuves identiques et indépendantes), donc le nombre de personnes prenant réellement le train suit la loi binomiale $\mathcal{B}\,(n, 0.92)$. Attention à votre succès qui a pour probabilité $1 - 0.08 = 0.92$.
   b) E(X)=0.92n.
2. On cherche n pour que $p(X \leqslant 180) \geqslant 0.95$, car on veut que la probabilité qu'il y ait moins de 180 personnes au départ soit supérieure à 0.95.
   A la calculatrice on peut entrer dans le mode suite u(n)=binomcdf (n, 0.92,180) si c'est une TI (ou 180,n, 0.92 pour casio ?) et voir le tableau, on trouve n=189.

Exercice 3

1. Vrai car il y a 3 choix du motif suivant (on ne veut pas le soleil), puis encore 3 pour le dernier.
2. Faux Il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir 2 motifs parmi 4, donc 6 choix
3. Vrai il y a 3 choix de motif pour chaque case libre (3-liste de 3 éléments parmi 3) donc $3^3 = 27$ choix
4. Vrai il y a 4 choix du premier motif puis 3 pour chacun des 5 suivants, donc $4 * 3^5$
5. Faux : ceci correspond aux nombre de choix des 2 motifs mais il faut encore choisir celui par lequel on commence donc la réponse serait $2 * \binom{4}{2}$

Exercice 4

Pour ceux qui ont du mal je suggère un arbre :



1. Faux il y a 3 chevaux blancs et 7 au total donc la probabilité est $\frac{3}{7}$
2. Vrai Avec l'arbre on trouve $dfrac37 * \frac{2}{7}$, et on simplifie.

3. Faux ce serait 4*3*3*2*2*1 choix en commençant par un noir et autant en commençant par un blanc.
4. Vrai cf l'arbre on trouve $\frac{3}{7} * \frac{4}{6} = \frac{3*4}{7*6}$ et on simplifie.
5. Faux On veut B,B,B,N soit $\frac{3*2*1*4}{7*6*5} = \frac{4}{35}$
6. Vrai
   Il faudrait faire le tableau donnant la loi de X, car X n'est pas une loi binomiale :

x	1	2	3	4
p(X=x)	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7*5}$	$\frac{1}{7*5}$

   E(X)=$\frac{4}{7} + 2 * \frac{2}{7} + 3 * \frac{4}{35} + 4 * \frac{1}{35} = \frac{8}{5}$

Exercice 5

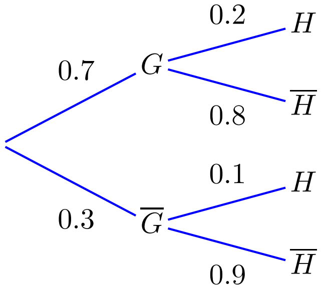
1. Faux On reconnait un schéma de Bernoulli et le nombre X de six suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3, 1/6)$, donc $p(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{2*36}$
2. Vrai aussi cette fois X suit la loi $\mathcal{B}(3, 1/3)$, donc $p(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3*1*2}{3^3} = \frac{2}{9}$
3. Vrai En appelant S l'événement avoir 2 six, T l'événement avoir un dé truqué, comme $T \cap S$ et $\overline{T} \cap S$ sont incompatibles on aura :
$$p(S) = p(T \cap S) + p(\overline{T} \cap S) = 0.5 * \frac{2}{9} + 0.5 * \frac{5}{2*36} = \frac{2*8+5}{2*2*36} = \frac{21}{4*6*6} = \frac{7}{4*2*6}$$
4. Faux On cherche
$$p_S(T) = \frac{p(S \cap T}{p(S)} = \frac{0.5 * 2/9}{7/48} = \frac{2}{3}$$

Exercice 6

1. réponses toutes fausses C'est un tirage simultané donc il faut utiliser les combinaisons :
   • le nombre de cas possibles est le nombre de façons de choisir 3 jetons parmi 10, soit $\binom{10}{3}$
   • le nombre de cas favorables est le nombre de façons de choisir 1 pair parmi 5 et 2 impairs parmi 5, soit $\binom{5}{1} * \binom{5}{2}$
   donc
$$p = \frac{\binom{5}{1} * \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{5*10}{120} = \frac{5}{12}$$
2. réponse C : On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ donc $p(a \cap B) = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.25$
3. Les réponses b et d sont justes.

Exercice 7

l'événement "mangé par le héron", et G l'événement "grenouille verte"



1. Vrai : On demande $p_{\overline{G}}(H) = 0.1$ d'après l'énoncé
2. Vrai d'après l'énoncé
3. Faux p(H)=0.3*0.1+0.7*0.2=0.17
4. Vrai On cherche $p(\overline{G} \cap H) = 0.3 * 0.1$

5. Faux on cherche $p_H(\overline{G}) = \dfrac{p(H \cap \overline{G})}{p(H)} = \dfrac{0.3 * 0.1}{0.17}$

Exercice 8

1. Faux attention à qui est le succès : ici c'est $\mathcal{B}(n, \frac{3}{4}$ car X désigne le nombre de boules blanches.
2. Vrai $p(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 * (0.25)^n = 0.25^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2^2}\right)^n$, et règles des puissances.
3. Faux $p(X < 5) = 1 - p(x \geqslant 5)$
4. Vrai