Intervalles de fluctuations et de confiance

Exercice 1

A et B sont candidats à une élection. La population semble partagée entre les deux candidats. Un journal décide de réaliser un sondage sur un échantillon de 900 personnes et constate que 468 sont favorables à A . Que devrait-il dire à ses lecteurs ?

Exercice 2

Dans un urne contenant des boules rouges et bleues en proportions inconnues, on effectue des tirages au hasard avec remise.
1. Après avoir effectué 100 tirages, on compte 52 boules rouges et 48 boules bleues. Donner un intervalle de confiance à 95% de la proportion p de boules rouges dans l'urne.
2. Combien faudrait-il, au minimum, effectuer de tirages pour obtenir un intervalle de confiance à 95% de longueur u égale à 0,02

Exercice 3

En Novembre 1976, dans un comté du Texas, Rodrigo Partida est condamné à huit ans de prison. Il attaque ce jugement au motif que la décision des jurés de ce comté est, selon lui, discriminante à l'égard des américains d'origine mexicaine.
Alors que 80% de la population de ce comté est d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des années précédentes, il n'y a eu que 339 personnes d'origine mexicaine.
Devant la cours suprême , un expert statisticien produit des arguments pour convaincre du bien fondé de la requête de l'accusé.
Pouvez vous décider si sa requête est justifiée ?

Exercice 4

Un laboratoire pharmaceutique met en place un test pour estimer l'efficacité d'un nouveau médicament contre les migraines.
Deux groupe de 125 patients souffrant de migraines considérés comme des échantillons aléatoire participe à ce test.
On administre aux patients du groupe A le nouveau médicament, alors que les patients du groupe B reçoivent un placebo (sans principe actif (ne fait rien)).
Au bout de quatre jours de traitement , 75 patients du groupe A et 65 patients du groupe B déclarent ressentir une diminution de l'intensité de leur migraine.

1. Déterminer les intervalles de confiance, au niveau de confiance 0.95, des proportions de patients déclarant ressentir une diminution de l'intensité de leur migraine dans chaque échantillon.
2. Ces intervalles de confiance permettent-ils, au niveau de confiance 0.95, de considérer que le médicament soit plus efficace que le placebo ?
3. Quelle devrait-être la taille minimale de chaque échantillon pour que, avec des proportions identiques à celles observées précédemment, les résultats confirment l'efficacité du médicament, au niveau de confiance 0,95 ?

Exercice 5 Amérique du sud nov 2014

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :

— une petite taille,

— une taille standard.

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).

En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410 ; 450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68 ; 70]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.

   On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.

   Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} prés de la probabilité

   $P(410 \leqslant X \leqslant 450)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.

   On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.

   Déterminer la valeur de σ, au centième prés, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.

   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta) = 0,97$ pour $\beta \approx 2,17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.

Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse.

(On pourra utiliser l'intervalle de fluctuation)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard.

On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.

On considère les événements :

A : « le ballon de football est de petite taille »,

B : « le ballon de football est de taille standard »,

C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'événement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la réglementation.
3. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à $0,962$.
4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Correction : Intervalles de fluctuations et de confiance

Exercice 1

Il faut déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95% car les conditions sont réunies (n>30, nf>5 et n(1-f)>5), on trouve

$$I = \left[\frac{468}{900} - \frac{1}{\sqrt{900}}; \frac{468}{900} + \frac{1}{\sqrt{900}}\right] = [0.468, 0.553]$$

Le journal ne peut tirer aucune conclusion de son sondage car 0.5 appartient à cet intervalle .

Exercice 2

1. Les conditions d'un intervalles de confiance sont réunies , on trouve $I = [0.42, 0.62]$, et la proportion de boules rouges est probablement dans cet intervalle.
2. On veut un nombre n tel que l'amplitude de l'intervalle de confiance :

$$f + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.02 \iff \sqrt{n} = 100 \iff n = 10000$$

Exercice 3

Cette fois on connait la proportion d'américains d'origine mexicaine de ce comté, on va déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0.95 car les conditions $n > 30$; $np > 5$ et $n(1-p) > 5$ sont réunies, on trouve

$$I = [0.773, 0.826]$$

Or la fréquence de jurés d'origine mexicaine est $f = \dfrac{339}{870} = 0.389$, le probabilité que cette fréquence appartienne à I est de 95%, ce qui n'est pas le cas donc on peut juger que le recrutement des jurés n'est pas aléatoire et qu'il y a discrimination.
Rodrigo Partida a gagné son procès au vu de cet argument.

Exercice 4

1. $I_A = [0.4945; 0.624]$ et la fréquence est $f_A = 0.6$
   $I_B = [0.4305; 0.56]$ et $f_B = 0.52$

2. Ces deux intervalles ne sont pas disjoints donc on ne peut conclure à l'efficacité du médicament
3. Il faudrait avoir

$$f_A - \frac{1}{\sqrt{n}} > f_B + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < f_A - f_B \iff \sqrt{n} > \frac{2}{0.008} \iff n > 625$$

   donc pour $n > 625$ et avec les mêmes proportions on pourrait conclure à l'efficacité du médicament

Exercice 5 Amérique du sud nov 2014

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).
En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle [410 ; 450] et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle [68 ; 70].

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.
   On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.
   A la calculatrice, on trouve $P(410 \leqslant X \leqslant 450) \approx 0,954$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.
On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.
On sait que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation ce qui veut dire que $P(68 \leqslant Y \leqslant 70) \approx 0,97$.
Si Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 69$ et d'écart type σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-69}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
De plus : $68 \leqslant Y \leqslant 70 \iff -1 \leqslant Y - 69 \leqslant 1 \iff -\dfrac{1}{\sigma} \leqslant \dfrac{Y-69}{\sigma} \leqslant \dfrac{1}{\sigma} \iff -\dfrac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{\sigma}$
On a donc $P(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97 \iff P\left(-\dfrac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) = 0,97$.
Or, d'après le texte, $P(-2,17 \leqslant Z \leqslant 2,17) = 0,97$.
On peut déduire que $\dfrac{1}{\sigma} = 2,17$ et donc que $\sigma \approx 0,46$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $n = 250$ et $p = 0,98$.
- $250 \geqslant 30$;
- $np = 250 \times 0,98 = 245 \geqslant 5$;
- $n(1-p) = 250 \times 0,02 = 5 \geqslant 5$

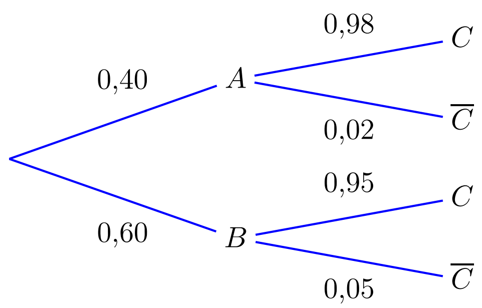
Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de conformité des ballons est :

$$I = \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\ ;\ 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\right] = [0,962\ ;\ 0,998]$$

Il y a 233 ballons conformes sur 250 ce qui fait une fréquence de $f = \dfrac{233}{250} = 0,932$.
$0,932 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise.

Partie C

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. « Le ballon est de petite taille et il est conforme à la réglementation » correspond à l'événement $A \cap C$.
D'après l'arbre : $P(A \cap C) = 0,40 \times 0,98 = 0,392$
3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = 0,40 \times 0,98 + 0,60 \times 0,95 = 0,392 + 0,570 = 0,962$
4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation.
On cherche la probabilité qu'il soit de petite taille, autrement dit on cherche $P_{\overline{C}}(A)$.
$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,962 = 0,038$ donc $P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,40 \times 0,02}{0,038} \approx 0,211$