Géométrie dans l'espace QCM

Exercice 1 (Amérique du sud nov 2014)

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A$(2 ; 5 ; -1)$, B$(3 ; 2 ; 1)$ et C$(1 ; 3 ; -2)$. Le triangle ABC est :

   (a) rectangle et non isocèle

   (b) isocèle et non rectangle

   (c) rectangle et isocèle

   (d) équilatéral

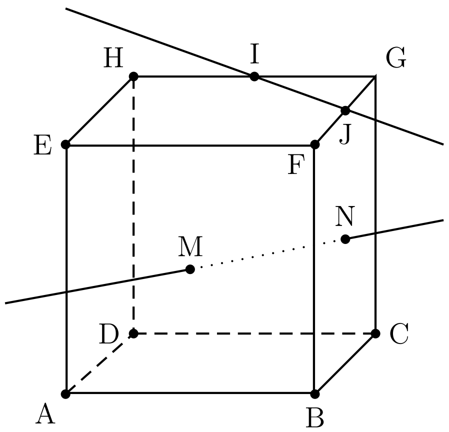
2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A$(2 ; 5 ; -1)$. Une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan P et passant par A est :

   a. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

3. Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :

   a. l'ensemble vide **b.** la médiatrice du segment [AB] **c.** le cercle de diamètre [AB] **d.** la droite (AB)

4. La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.



Les droites (IJ) et (MN) sont :

(a) perpendiculaires

(b) sécantes, non perpendiculaires

(c) orthogonales

(d) parallèles

Exercice 3 (Antilles juin 2014)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A$(1 ; 2 ; 5)$, B$(-1 ; 6 ; 4)$, C$(7 ; -10 ; 8)$ et D$(-1 ; 3 ; 4)$.

1. **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.
2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.
   Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.
3. **Proposition 3 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z + 7 = 0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.
   Proposition 4 : Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

Exercice 3 (Asie juin 2014)

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A$(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$, B$(1\,;\,1\,;\,1)$, C$(0\,;\,3\,;\,1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1
Soit $\mathcal{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ est :

a. $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ **b.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

c. $\begin{cases} x = 5+4t \\ y = -3-2t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ **d.** $\begin{cases} x = 4-2t \\ y = -2+t \\ z = 3-4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Question 2

Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3-t \\ z = 2-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

a. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas sécants
b. La droite $\mathcal{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
c. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point E$\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{7}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\right)$.
d. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point F$\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{22}{3}\right)$.

Question 3
a. L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4
Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. $22{,}2\ ^\circ$ **b.** $0{,}4\ ^\circ$ **c.** $67{,}8\ ^\circ$ **d.** $1{,}2\ ^\circ$

Exercice 4 (Antilles sept 2013)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$\text{A}(0\ ;\ -1\ ;\ 1),\quad \text{B}(4\ ;\ -3\ ;\ 0)\ \text{ et }\ \text{C}(-1\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+8 \end{cases}$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.
   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Correction

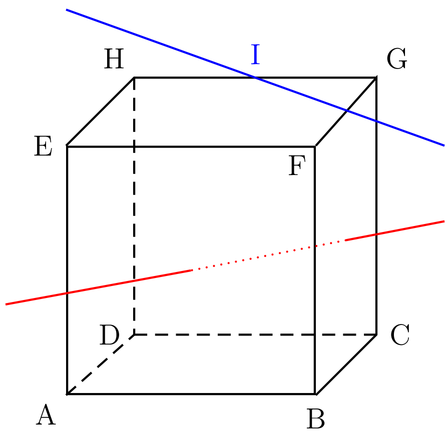
Exercice 1 (Amérique du sud nov 2014)

1. **b.**
   Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A $(2\ ;\ 5\ ;\ -1)$, B $(3\,;\,2\,;\,1)$ et C $(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$.
   $\text{AB}^2 = (3-2)^2 + (2-5)^2 + (1+1)^2 = 1+9+4 = 14$
   $\text{AC}^2 = (1-2)^2 + (3-5)^2 + (-2+1)^2 = 1+4+1 = 6$
   $\text{BC}^2 = (1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2 = 4+1+9 = 14$
   Donc le triangle ABC est isocèle non rectangle (Il est isocèle de sommet B et $BC^2 + BA^2 \neq AC^2$).

2. **c.**
   Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A $(2\ ;\ 5\ ;\ -1)$.
   Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$, donc toute droite perpendiculaire au plan P aura un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$, ce qui élimine les propositions **a.** et **b.**
   On cherche si le point A appartient à la droite dont la représentation paramétrique est en **c.**; on résout le système : $\left\{\begin{array}{r c l} 2 &=& 6-2t \\ 5 &=& 3+t \\ -1 &=& 5-3t \end{array}\right.$
   Ce système a pour solution $t = 2$ donc la bonne réponse est **c.**

3. **c.**
   Soit A et B deux points distincts du plan.
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \iff M\text{AB est un triangle rectangle en } M \\ &\iff M \text{ appartient au cercle de diamètre [AB]} \end{aligned}$$

4. **c.**
   La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.
   Les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales; il suffit pour s'en convaincre de regarder le cube du dessus :



Choisissons le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$
Les points I, J, M et N ont respectivement comme coordonnées :
$\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 1\right)$, $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$
I et J ont la même cote : ils appartiennent au plan d'équation $z = 1$;
M et N ont la même côte : ils appartiennent au plan d'équation $z = \dfrac{1}{2}$.
Ces deux plans sont parallèles et distincts, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont ni perpendiculaires ni sécantes. Les réponses **a.** et **b.** sont fausses.
On a $\overrightarrow{\text{IJ}}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et $\overrightarrow{\text{MN}}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$; ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles.
La réponse **d.** est fausse.
Or $\overrightarrow{\text{IJ}} \cdot \overrightarrow{\text{MN}} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0$: les vecteurs sont orthogonaux et les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales. Réponse **c.**

Exercice 2 (Antilles juin 2014)

1. La proposition est **fausse**; en effet, on a : $\overrightarrow{AB}(-2\ ;\ 4\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{AC}(6\ ;\ -12\ ;\ 3)$, ces deux vecteurs sont colinéaires (car $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$), donc les trois points A, B et C sont alignés et ne définissent pas un plan.

2. La proposition est **vraie** car on vérifie aisément que les coordonnées de chacun des points A, B et D vérifient l'équation $x - 2z + 9 = 0$.

3. La proposition est **fausse** : la droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{3}{2}\ ;\ -3\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$, ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, il ne peut diriger (AC).

4. La proposition est **fausse** : le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(2~;~-1~;~5)$, le plan $\mathcal{P}'$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'(-3~;~-1~;~1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles.

Exercice 3 (Asie juin 2014)

On peut éliminer rapidement les réponses **a.** et **d.** car les vecteurs directeurs des droites proposées ne sont pas colinéaires au vecteur $\vec{u}$.

La représentation paramétrique donnée en **c.** est une droite qui contient le point A pour la valeur $t = -1$.

Question 2 - c.

Le plus efficace pour répondre à cette question est de résoudre le système $\left\{\begin{array}{r} x = 1+t \\ y = -3-t \\ z = 2-2t \\ 2x+y-z+5 = 0 \end{array}\right.$

qui donne $-\dfrac{2}{3}$ comme valeur à t et qui conduit au point E.

Question 3 - d.

On appelle $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On montre successivement que $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{\text{AB}} = 0$ et $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{\text{AC}} = 0$ ce qui prouve que les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles. Or A $\notin \mathcal{P}$ donc les plans sont strictement parallèles.

Question 4 - a.

On utilise l'expression du produit scalaire :

$\overrightarrow{\text{AB}}.\,\overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\widehat{\text{BAC}} \iff 12 = \sqrt{8} \times \sqrt{21} \times \cos\widehat{\text{BAC}}$

donc $\cos\widehat{\text{BAC}} \approx 0{,}925\,8$ ce qui correspond à $22,2^{\circ}$.

Exercice 4 (Antilles sept 2013)

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P. Δ a pour vecteur directeur $\delta(1~;~3~;~-2)$

   La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AB}}(4~;~-2~;~-1)$.

   La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AC}}(-1~;~-1~;~-2)$.

   Or $\delta \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 4-6+2 = 0$ et $\delta \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = -1-3+4 = 0$.

   Donc Δ est orthogonale à deux droites (AB) et (AC) sécantes du plan P : elle est orthogonale à ce plan. **VRAIE**.

2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

   On a vu que Δ et (AB) étaient orthogonales, donc elles ne sont pas parallèles.

   Si elles sont coplanaires elles sont donc sécantes en un point.

   En traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{A}M} = t'\overrightarrow{\text{AB}}$, on obtient une équation cartésienne de la droite (AB) : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t' \\ y &=& -2t'-1 \\ z &=& -t'+1 \end{array}\right.$ avec t' appartenant à $\mathbb{R}$.

   S'il existe un point commun aux deux droites ses coordonnées vérifient le système :

   $\left\{\begin{array}{rcl} t &=& 4t' \\ 3t-1 &=& -2t'-1 \\ -2t+8 &=& -t'+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 4t' \\ 12t' &=& -2t' \\ -8t' &=& -t'-7 \end{array}\right.$ système qui n'a manifestement pas de solution.

   FAUSSE

3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5 = 0$.

   On a $4+3\times(-3)-2\times 0+5 = 0 \iff -5 = 0$, qui signifie que les coordonnées de B ne vérifient pas cette équation de plan. **FAUSSE**

4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11~;~-1~;~4)$.

   Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5 = 0$.

   O n'appartient pas au plan : si la droite D est parallèle au plan, elle est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{n}(1~;~3~;~-2)$ normal au plan.

   Or $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 11-3-8 = 0$. Les vecteurs sont bien orthogonaux, la droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5 = 0$. **VRAIE**